MA - Esame scritto (14-12-2015)
[soluzione]

Esercizio 1

(a) In coordinate cartesiane $\mathbf{x} = (x, y, z)$ la Lagrangiana del sistema si scrive

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \tfrac{1}{2}m\,|\dot{\mathbf{x}}|^2 - mgz - \tfrac{1}{2}k|\mathbf{x}|^2.$$

Usando il cambiamento di coordinate suggerito, che implica

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{2}\rho, \qquad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot\rho\cos\theta - \rho\dot\theta\sin\theta \\ \dot\rho\sin\theta + \rho\dot\theta\cos\theta \\ -\dot\rho \end{pmatrix}$$

tale espressione diventa

$$\mathcal{L}(\rho, \theta, \dot\rho, \dot\theta) = \tfrac{1}{2}m\left(2\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2\right) + mg\rho - k\rho^2.$$

(b) Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2m\dot\rho) - m\rho\dot\theta^2 - mg + 2k\rho = 2m\ddot\rho - m\rho\dot\theta^2 - mg + 2k\rho = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\rho^2\dot\theta\right) = m\rho^2\ddot\theta + 2m\dot\rho\dot\theta = 0, \end{cases}$$

(c) Poiché $\mathcal{L}$ non dipende da θ il corrispondente momento L è conservato, cioè

$$L = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = m\rho^2\dot\theta = \text{const.}$$

(d) Dato che $\mathcal{L}$ è quadratica nelle velocità e $\mathcal{L} = T(\rho, \dot\rho, \dot\theta) - V(\rho)$, allora $E = T(\rho, \dot\rho, L/(m\rho^2)) + V(\rho)$, dove abbiamo ricavato $\dot\theta = L/(m\rho^2)$ dalla conservazione di cui sopra, cioè

$$E = m\dot\rho^2 + \frac{L^2}{2m\rho^2} - mg\rho + k\rho^2 = m\dot\rho^2 + V_{\text{eff}}(\rho),$$

con

$$V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{L^2}{2m\rho^2} - mg\rho + k\rho^2.$$

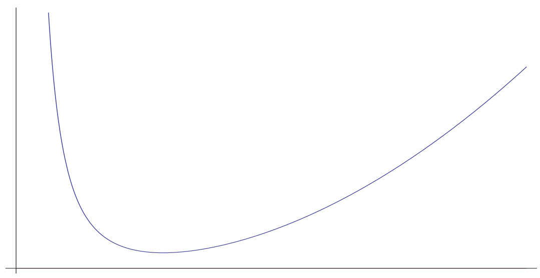

Figura 1: Potenziale efficace $V_{\text{eff}}(\rho)$, $\rho > 0$.

(e) Le curve di livello soddisfano l'equazione

$$\dot{\rho} = \pm \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{E - V_{\text{eff}}(\rho)},$$

con $E \geq V_{\text{eff}}(\rho_m)$ e ρ_m punto di minimo assoluto di V_{eff}. Il grafico di V_{eff} è infatti riportato in fig. 1 e da un rapido studio di funzione si può dedurre che, se $L > 0$,

(a) $\lim_{\rho \to 0, +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$;

(b) $V''_{\text{eff}}(\rho) = \frac{3L^2}{m\rho^4} + 2k > 0$, cioè la funzione è convessa e ammette un unico punto critico che è un minimo assoluto.

Le curve di livello e l'analisi qualitativa del moto è riassunta in fig. 2. Il moto è possibile solo per $E \geq V_{\text{eff}}(\rho_m)$ ed è sempre limitato e periodico fra due estremi $\rho_-(E) < \rho_+(E)$. Nel caso $E = V_{\text{eff}}(\rho_m)$, $\rho_\pm = \rho_m$. Il periodo del moto nella coordinata ρ è

$$T = 2 \int_{\rho_-}^{\rho_+} \mathrm{d}\rho \, \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(\rho)}}.$$

(f) Affinché il moto complessivo sia periodico deve essere $E = V_{\text{eff}}(\rho_m)$ (nel qual caso il moto è circolare uniforme) oppure, se $E > V_{\text{eff}}(\rho_m)$, deve essere soddisfatta l'equazione

$$\theta(T) - \theta(0) = \int_{\rho_-}^{\rho_+} \mathrm{d}\rho \, \frac{\sqrt{m} L^2}{m\rho^2 \sqrt{E - V_{\text{eff}}(\rho)}} = \frac{m\pi}{n},$$

con $m, n \in \mathbb{N}$. La condizione è necessaria al fine di avere orbite chiuse. Per tutti i dati iniziali E, L per cui la condizione di sopra non è soddisfatta le orbite sono limitate e quasi periodiche ma non si chiudono mai e tendono a ricoprire densamente la corona circolare $\rho_- \leq \rho \leq \rho_+$.

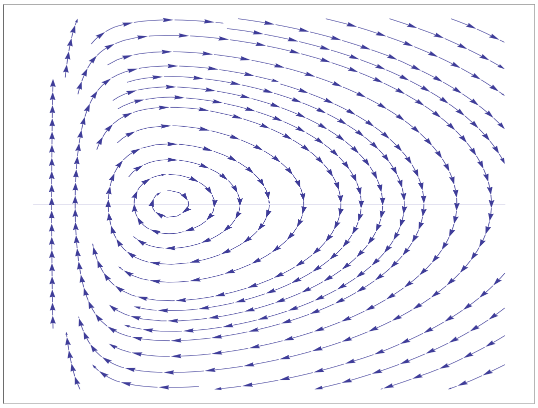

Figura 2: Curve di livello nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

Esercizio 2

(a) L'equazione di Eulero-Lagrange del sistema è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{\ddot{q}}{\sinh^2 q} - \frac{\dot{q}^2 \cosh q}{\sinh^3 q} = 0,$$

oppure, dato che $q > 0$,

$$\ddot{q} = \frac{\dot{q}^2}{\tanh q}.$$

(b) Il momento coniugato di q è

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{q}}{\sinh^2 q},$$

e

$$H(p, q) = \sinh^2 q\, p^2 - \tfrac{1}{2}\sinh^2 q\, p^2 = \tfrac{1}{2}\sinh^2 q\, p^2.$$

Le equazioni di Hamilton corrispondenti sono

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \sinh^2 q\, p, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\sinh q \cosh q\, p^2. \end{cases}$$

(c) L'equazione di Hamilton-Jacobi per tale funzione generatrice è

$$H\left(\partial_q S, q\right) = \tfrac{1}{2}P^2,$$

ovvero

$$\tfrac{1}{2}\sinh^2 q \left(\tfrac{\partial S}{\partial q}\right)^2 = \tfrac{1}{2}P^2.$$

Prendendo $S(q,P) = P \log \tanh(q/2)$, calcoliamo

$$\frac{\partial S}{\partial q} = \frac{P}{2\tanh(q/2)\cosh^2(q/2)},$$

da cui

$$\frac{1}{2}\sinh^2 q\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 = \frac{P^2\sinh^2 q}{8\sinh^2(q/2)\cosh^2(q/2)} = \frac{P^2\sinh^2 q}{2\sinh^2 q} = \frac{1}{2}P^2$$

dove abbiamo usato la formula di duplicazione $\sinh(q) = 2\sinh(q/2)\cosh(q/2)$.

(d) La trasformazione canonica è

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial S}{\partial q} = \dfrac{P}{\sinh q}, \\ Q = \dfrac{\partial S}{\partial P} = \log\tanh(q/2). \end{cases}$$

Si noti che la positività di q implica la positività di Q.

(e) L'equazioni di Hamilton nelle variabili (Q,P) sono $\dot{Q} = P$ e $\dot{P} = 0$, che naturalmente sono risolte da

$$\begin{cases} Q(t) = Q_0 + P_0 t, \\ P(t) = P_0, \end{cases}$$

con $Q_0 > 0$. Invertendo la trasformazione canonica di cui sopra

$$\begin{cases} q = 2\,\mathrm{arctanh}\left(e^Q\right) = \log\frac{1+e^Q}{1-e^Q}, \\ p = \frac{P}{\sinh q}, \end{cases}$$

da cui ricaviamo

$$q(t) = \log\frac{1+e^{Q_0+P_0 t}}{1-e^{Q_0+P_0 t}} = 2\mathrm{arctanh}(e^{Q_0+P_0 t}),$$

e quindi

$$\dot{q}(t) = \frac{2P_0 e^Q}{1-e^{2Q}} = -\frac{P_0}{\sinh Q},$$

$$\ddot{q}(t) = \frac{P_0^2\cosh Q}{\sinh^2 Q} = \dot{q}^2\cosh Q$$

ma, usando la formula di duplicazione $\tanh q = 2\tanh(q/2)/(1+\tanh^2(q/2))$,

$$\frac{1}{\tanh q} = \frac{1+\tanh^2(q/2)}{2\tanh(q/2)} = \cosh Q$$

che implica il risultato.